

Opérateurs intégraux et méthodes rapides pour la résolution numérique de problèmes denses et de grande dimension

Éric DARRIGRAND

IRMAR, Université de Rennes 1

le 28 novembre 2014

en vue d'obtenir l'habilitation à diriger des recherches

Plan

- 1 **Aperçu général**
- 2 **Systèmes Hamiltoniens et FMM régularisée**
- 3 **UWVF et représentation intégrale**
- 4 **Éléments finis et représentation intégrale**
- 5 **Opérateurs intégraux de volume**
- 6 **FMM et préconditionneur OSRC**
- 7 **Perspectives**

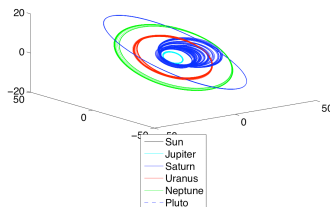
Plan

- 1 **Aperçu général**
- 2 Systèmes Hamiltoniens et FMM régularisée
- 3 UWVF et représentation intégrale
- 4 Éléments finis et représentation intégrale
- 5 Opérateurs intégraux de volume
- 6 FMM et préconditionneur OSRC
- 7 Perspectives

Problèmes denses de grande dimension

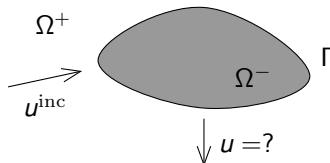
● Problèmes à N-corps

Trajectories of the planets – classical fmm 3p7b 2NeiMaxTr



Systemes Hamiltoniens
Interactions de Coulomb
Dynamique moléculaire

● Problèmes en domaine extérieur



Propagation d'onde
Helmholtz, Maxwell

Contributions

- **Systèmes Hamiltoniens** : régularisation de la FMM (RFMM)
- **Éléments finis ou UWVF en domaine extérieur** :
 - représentation intégrale (RI) – condition artificielle exacte
 - application d'une méthode rapide
- **Opérateurs intégraux de volume (VIE)** :
 - équivalence au problème initial
 - caractère bien-posé – analyse spectrale
- **Opérateurs intégraux de surface** :
 - préconditionnements analytiques (EID, OSRC)
 - méthodes rapides (FMM)
- **Développements numériques** :
 - équations intégrales pour MÉLINA++ et XLiFE++
 - une bibliothèque FMM générique : FastMMLib
 - traitement des singularités du noyau

Plan

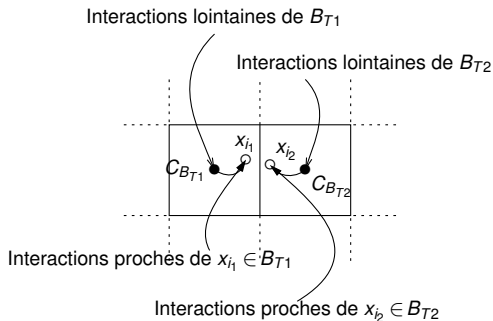
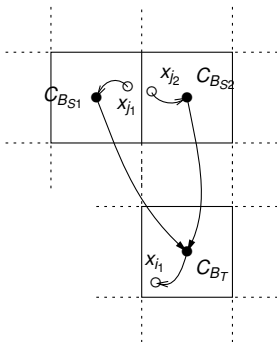
- 1 Aperçu général
- 2 Systèmes Hamiltoniens et FMM régularisée**
- 3 UWVF et représentation intégrale
- 4 Éléments finis et représentation intégrale
- 5 Opérateurs intégraux de volume
- 6 FMM et préconditionneur OSRC
- 7 Perspectives

FMM régularisée



Philippe Chartier, ED, and Erwan Faou. A regular fast multipole method for geometric numerical integrations of Hamiltonian systems. *BIT*, 50(1) : 23–40, 2010.

Irrégularité de la FMM à l'interface entre les boîtes multipolaires
(tant au niveau “source” qu’au niveau “cible”)

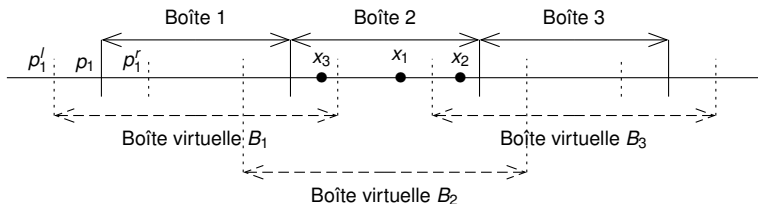


FMM régularisée



Philippe Chartier, ED, and Erwan Faou. A regular fast multipole method for geometric numerical integrations of Hamiltonian systems. *BIT*, 50(1) : 23–40, 2010.

Régularisation par élargissement et **superposition des boîtes**
et **fonction de régularisation**, χ , sur la zone de superposition

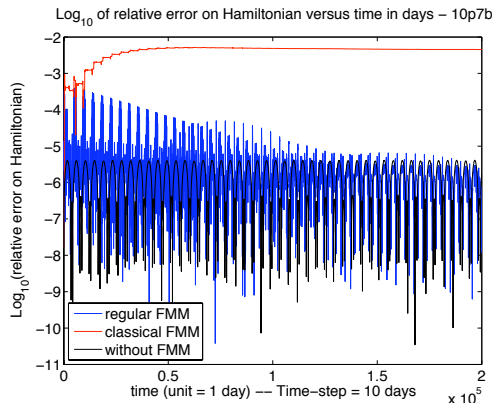


$$\text{RFMM}(Aq)_{x_2} = (1 - \chi(x_2)) \text{FMM}(Aq)_{x_2 \in B_2} + \chi(x_2) \text{FMM}(Aq)_{x_2 \in B_3}$$

Application au système solaire



Philippe Chartier, ED, and Erwan Faou. A regular fast multipole method for geometric numerical integrations of Hamiltonian systems. *BIT*, 50(1) : 23–40, 2010.

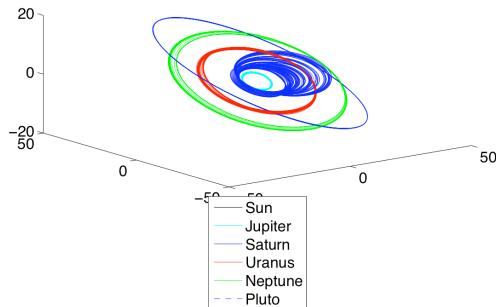


Application au système solaire



Philippe Chartier, ED, and Erwan Faou. A regular fast multipole method for geometric numerical integrations of Hamiltonian systems. *BIT*, 50(1) : 23–40, 2010.

Trajectories of the planets – classical fmm 3p7b 2NeiMaxTr

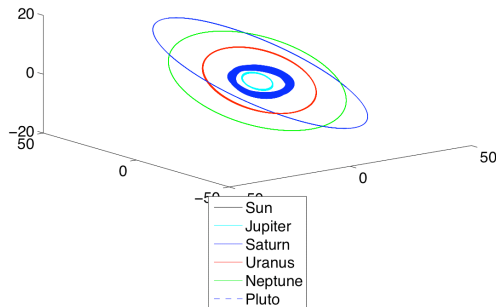


Application au système solaire



Philippe Chartier, ED, and Erwan Faou. A regular fast multipole method for geometric numerical integrations of Hamiltonian systems. *BIT*, 50(1) : 23–40, 2010.

Trajectories of the planets – regular fmm 3p7b 2NeiMaxTr



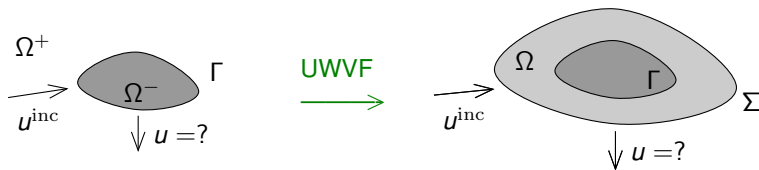
Plan

- 1 Aperçu général
- 2 Systèmes Hamiltoniens et FMM régularisée
- 3 UWVF et représentation intégrale**
- 4 Éléments finis et représentation intégrale
- 5 Opérateurs intégraux de volume
- 6 FMM et préconditionneur OSRC
- 7 Perspectives

Formulation variationnelle ultra-faible (UWVF)



ED and Peter Monk. Combining the ultra-weak variational formulation and the multilevel fast multipole method. *Appl. Numer. Math.*, 62(6) : 709–719, 2012.

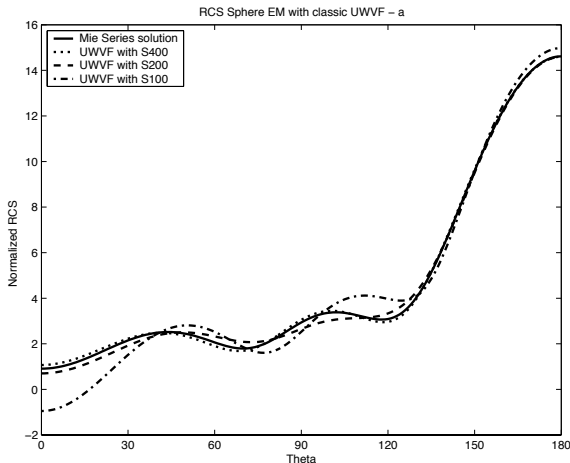


- équations de Maxwell 3D en domaine extérieur
- UWVF : une alternative aux éléments finis
- introduction d'un bord artificiel Σ
- condition au bord sur Σ : ABC, PML ou représentation intégrale (RI)

SER : UWVF sans/avec RI



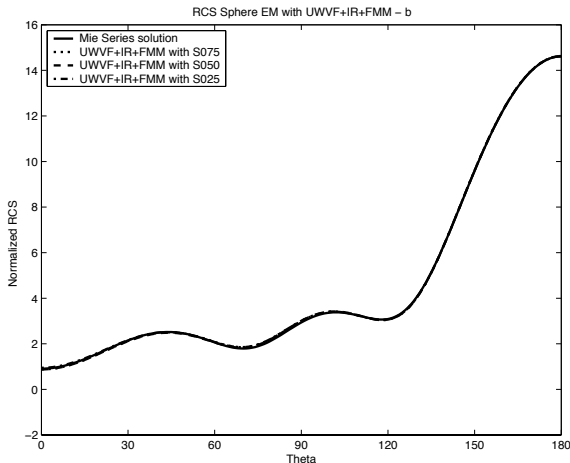
ED and Peter Monk. Combining the ultra-weak variational formulation and the multilevel fast multipole method. *Appl. Numer. Math.*, 62(6) : 709–719, 2012.



SER : UWVF sans/avec RI



ED and Peter Monk. Combining the ultra-weak variational formulation and the multilevel fast multipole method. *Appl. Numer. Math.*, 62(6) : 709–719, 2012.



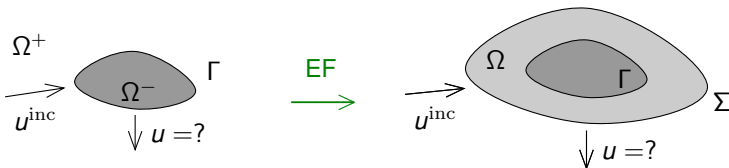
Plan

- 1 Aperçu général
- 2 Systèmes Hamiltoniens et FMM régularisée
- 3 UWVF et représentation intégrale
- 4 Éléments finis et représentation intégrale**
- 5 Opérateurs intégraux de volume
- 6 FMM et préconditionneur OSRC
- 7 Perspectives

Éléments finis et représentation intégrale



ED, Nabil Gmati, and Rania Rais. Schwarz method justification of a coupling between finite elements and integral representation for Maxwell exterior problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 352 : 311–315, 2014.



- équations de Maxwell 3D en domaine extérieur
- méthode CEFRI [HAZARD, LENOIR 96] :
éléments finis + représentation intégrale sur Σ
- analyse de convergence de résolutions itératives

CEFRI et solveurs itératifs



ED, Nabil Gmati, and Rania Rais. Schwarz method justification of a coupling between finite elements and integral representation for Maxwell exterior problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 352 : 311–315, 2014.

- Formulation variationnelle discrète de la forme $(A + C)E = F$,
 $A \longleftrightarrow$ matrice éléments finis sur Ω , symétrique creuse,
 $C \longleftrightarrow$ représentation intégrale sur Σ , bloc extradiagonal dense.
- Résolution itérative de type point fixe [JIN, LIU 2001] :

$$AE_{n+1} = -CE_n + F$$

Théorème [ED, N. Gmati, R. Rais]

Dans le cas sphérique, la convergence de l'algorithme de Jin et Liu est conditionnée par la distance de Γ à Σ .

Justification basée sur une interprétation de type méthode de décomposition de Schwarz.

CEFRI et solveurs itératifs



ED, Nabil Gmati, and Rania Rais. Schwarz method justification of a coupling between finite elements and integral representation for Maxwell exterior problem. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 352 : 311–315, 2014.

- Application de solveurs de type Krylov à $(I + A^{-1}C)E = A^{-1}F$,
[F. BEN BELGACEM, N. GMATI, F. JELASSI 09] [N. GMATI, B. PHILIPPE 08]

Il s'agit d'une résolution du système

$$(A + C)E = F$$

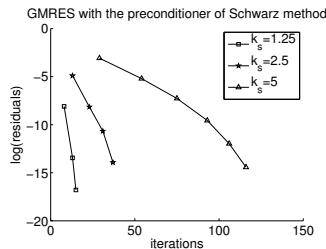
préconditionnée par A dit “préconditionnement de Schwarz”.

Théorème [ED, N. Gmati, R. Rais]

Dans le cas sphérique, la convergence des solveurs de type Krylov avec preconditionnement de Schwarz est superlinéaire et inconditionnelle.

MÉLINA++ et validation numérique

- ajout de nombreux intégrands dans MÉLINA++ (avec Rania Rais, Daniel Martin, Yvon Lafranche)
- important travail de validation numérique (nouveaux intégrands, régularisation, pénalisation, réglage des solveurs)
- illustration de la convergence superlinéaire du GMRES



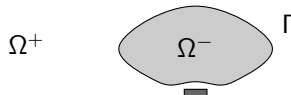
ED, Nabil Gmati, and Rania Rais. Convergence of Krylov subspace solvers with Schwarz' preconditioner for Maxwell exterior problem. *in preparation*.

Plan

- 1 Aperçu général
- 2 Systèmes Hamiltoniens et FMM régularisée
- 3 UWVF et représentation intégrale
- 4 Éléments finis et représentation intégrale
- 5 Opérateurs intégraux de volume**
- 6 FMM et préconditionneur OSRC
- 7 Perspectives

Équations intégrales de volume (VIE)

- Étude initiée avec Ronan Sauleau de l'IETR et Martin Costabel, avec la participation de El-Hadji Koné et Hamdi Sakly, sur le thème de l'optimisation de forme des antennes-lentilles



- Très peu de travaux mathématiques antérieurs ([FRIEDMAN,PASCIAK 84], [POTTHAST 01], [KIRSCH et al 09])
- Équations largement utilisées par les physiciens ([KOTTMANN et al 00], [BUDKO et al 06], [SANCER et al 06], ...)
- Des études numériques avec des interprétations parfois excessives ([RAHOLA 00], [SAMOKHIN 11])

VIE : cas diélectrique



Martin Costabel, Eric Darrigrand, and El-Hadji Koné. Volume and surface integral equations for electromagnetic scattering by a dielectric body. *J. Comput. Appl. Math.*, 234(6) : 1817–1825, 2010.

Dans le cas d'un **contraste de perméabilité magnétique nul** :

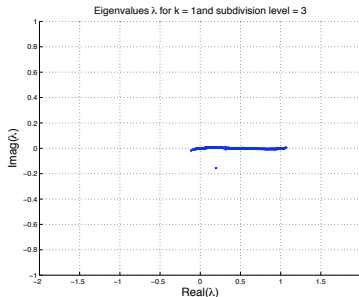
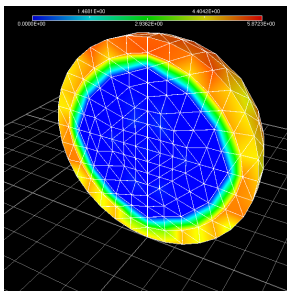
- Identification de **cadres fonctionnels** assurant l'équivalence entre plusieurs formulations :
 - équations de Maxwell avec conditions de transmission sur Γ et condition de radiation à l'infini
 - équations intégrales de surface (Γ) et de volume (Ω^-)
 - équations intégrales de volume (Ω^-)
- Vérification du **caractère bien posé**.
- **Analyse spectrale** de l'opérateur électrique.

VIE : cas diélectrique



Martin Costabel, Eric Darrigrand, and El-Hadji Koné. Volume and surface integral equations for electromagnetic scattering by a dielectric body. *J. Comput. Appl. Math.*, 234(6) : 1817–1825, 2010.

- Validations numériques avec MÉLINA++
 - ajout d'intégrands dans MÉLINA++ avec Daniel Martin et El-Hadji Koné
 - traitement des singularités des opérateurs intégraux de volume



VIE : cas général

- Identification des **cadres fonctionnels** appropriés à l'opérateur intégral volumique magnétique
- **Analyse spectrale** de l'opérateur intégral volumique sous des hypothèses très générales

Théorème [M. Costabel, ED, H. Sakly]

Si Γ est régulière, et les contrastes électrique η et magnétique ν constants,

- le spectre essentiel de l'opérateur électrique est $\{0, \frac{\eta}{2}, \eta\}$;
- le spectre essentiel de l'opérateur magnétique est $\{0, \frac{\nu}{2}, \nu\}$;
- le spectre essentiel de l'opérateur électromagnétique est $\{0, \frac{\eta}{2}, \eta, \frac{\nu}{2}, \nu\}$.

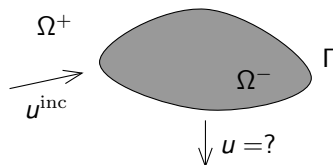


Martin Costabel, Eric Darrigrand, and Hamdi Sakly. The essential spectrum of the volume integral operator in electromagnetic scattering by a homogeneous body. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 350(3–4) : 193–197, 2012.

Plan

- 1 Aperçu général
- 2 Systèmes Hamiltoniens et FMM régularisée
- 3 UWVF et représentation intégrale
- 4 Éléments finis et représentation intégrale
- 5 Opérateurs intégraux de volume
- 6 FMM et préconditionneur OSRC**
- 7 Perspectives

Équations intégrales de surface



$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta u + k^2 u = 0, \quad \text{in } \Omega^+, \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Gamma} = g = -\frac{\partial u^{\text{inc}}}{\partial n}|_{\Gamma}, \quad \text{on } \Gamma, \\ \lim_{r \rightarrow +\infty} r \left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku \right) = 0, \end{array} \right.$$

Objectif : définir une stratégie efficace de résolution des équations intégrales (méthodes rapides et préconditionneurs OSRC)

avec Marion Darbas (Amiens), Yvon Lafranche (Rennes 1)

projet ANR Microwave



Marion Darbas, ED, and Yvon Lafranche. Combining analytic preconditioner and fast multipole method for the 3-D Helmholtz equation. *J. Comput. Phys.*, 236 : 289–316, 2013.

Une formulation intégrale équivalente

Équation intégrale CFIE [KRESS 83] :

Chercher $\varphi = -\gamma_0^+(u - u^{\text{inc}}) \in H^{1/2}(\Gamma)$ solution de

$$\left(\frac{I}{2} - K - \eta D \right) \varphi = -\gamma_0^+ u^{\text{inc}} - \eta \gamma_1^+ u^{\text{inc}} \quad \text{sur } \Gamma .$$

avec $\eta \in \mathbb{C}^*$ un paramètre de couplage et les opérateurs intégraux

$$Kq(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial G}{\partial n_y}(x, y) q(y) d\gamma(y) ,$$

$$Dq(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial^2 G}{\partial n_x \partial n_y}(x, y) q(y) d\gamma(y) .$$

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} ,$$

Deux difficultés majeures

- opérateurs globaux $\longrightarrow$ coût élevé de la résolution numérique
- mauvaises propriétés spectrales $\longrightarrow$ problèmes de convergence des solveurs itératifs

Formulation préconditionnée par OSRC

L'idée

L'opérateur NtD, noté V^{ex} , satisfait la relation $\frac{I}{2} - K + V^{\text{ex}} D = I$ sur Γ

L'équation préconditionnée : $\varphi = -\gamma_0^+(u - u^{\text{inc}}) \in H^{1/2}(\Gamma)$ tel que

$$\left(\frac{I}{2} - K + \tilde{V} D \right) \varphi = -\gamma_0^+ u^{\text{inc}} + \tilde{V} \gamma_1^+ u^{\text{inc}} \quad \text{sur } \Gamma$$

avec $\tilde{V}$ approximation OSRC de V^{ex} [ANTOINE et al 2005]

$$\tilde{V} = \frac{1}{ik} \left(I + \frac{\Delta_\Gamma}{k_\varepsilon^2} \right)^{-1/2}, \quad \text{où } k_\varepsilon = k + i\varepsilon, \quad \varepsilon \neq 0.$$

Remarques essentielles

- $\tilde{V}$ évalué par approximation de Padé,
- $\tilde{V}$ implique seulement des opérateurs différentiels,
- propriétés spectrales fortement améliorées dans le cas convexe,
- l'équation implique toujours les opérateurs intégraux K and D .

La méthode multipôle rapide (FMM)

[GREENGARD, ROKHLIN, CHEW, DARVE, ...]

Objectif : Évaluation rapide des produits matrice-vecteur avec la matrice

$$[L]_{ij} = \int_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \varphi_j(y) \varphi_i(x) d\gamma(y) d\gamma(x), \quad \forall i, j$$

Le principe

Pour i "loin de" j

$$[L]_{ij} \approx \sum_{p=1}^S c_p \sum_{B/B \cap \text{supp} \varphi_i \neq \emptyset} g_{i,B}^{(p)} \sum_{\tilde{B}/\tilde{B} \cap \text{supp} \varphi_j \neq \emptyset} \mathcal{T}_{B,\tilde{B}}^{(p)} f_{j,\tilde{B}}^{(p)}$$

avec $g_{i,B}^{(p)}$ le moment local dans la boîte B du d.d.l. cible φ_i ,
 $f_{j,\tilde{B}}^{(p)}$ le moment lointain dans la boîte $\tilde{B}$ du d.d.l. source φ_j ,
 $\mathcal{T}_{B,\tilde{B}}^{(p)}$ opérateur de transfert de $\tilde{B}$ à B .

Outils : Série de Gegenbauer et formule de Funk-Hecke.

FMM – Helmholtz 3D

Détail du développement :

$$c_p = \frac{ik}{(4\pi)^2} w_p, \quad f_{j,\tilde{B}}^{(p)} = \int_{\tilde{B} \cap \text{supp} \varphi_j} e^{-ik \langle s_p, y - C_{\tilde{B}} \rangle} \varphi_j(y) d\gamma(y),$$

$$g_{i,B}^{(p)} = \int_{B \cap \text{supp} \varphi_i} e^{ik \langle s_p, x - C_B \rangle} \varphi_i(x) d\gamma(x),$$

$$\mathcal{T}_{B,\tilde{B}}^{(p)} = \sum_{\ell=1}^L (-i)^\ell (2\ell + 1) h_\ell^{(1)}(k |C_B - C_{\tilde{B}}|) P_\ell(\cos(s_p, C_B - C_{\tilde{B}})),$$

$h_\ell^{(1)}$ fonction de Hankel sphérique ; P_ℓ polynôme de Legendre ;

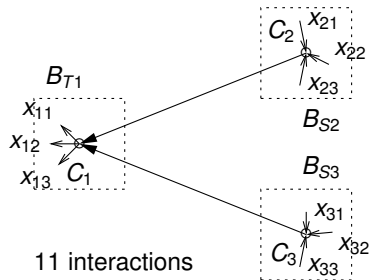
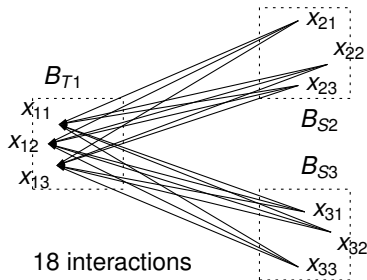
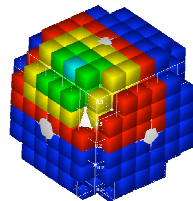
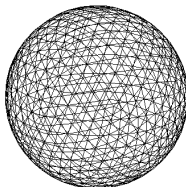
C_B centre de B ;

$(w_p, s_p)_p \longleftrightarrow$ formule de quadrature sur la sphère unité ;

$\sum_{p=1}^S \longleftrightarrow$ intégration sur la sphère unité ($S = (L + 1)(2L + 1)$) ;

$\sum_{\ell=1}^L \longleftrightarrow$ Série de Gegenbauer ($L = kd + C(kd)^3$).

FMM – schématiquement

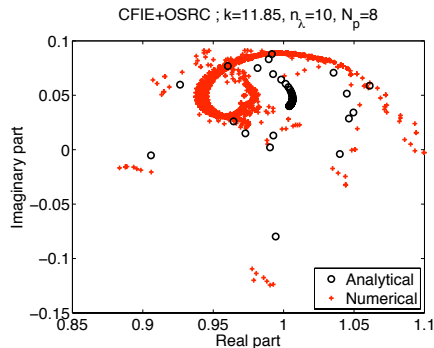
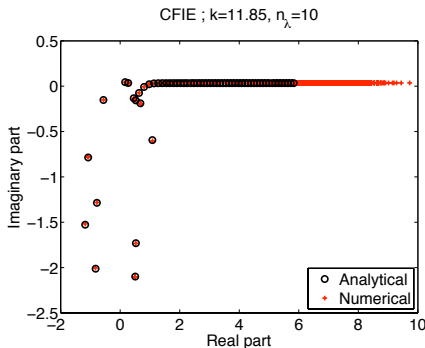


Illustrations numériques

- **Considération de différents cas tests :**
 - Sphère : validation avec la solution analytique
 - Objets à cavité cubique ou sphérique
 - Sous-marin et cône-sphère : des objets moins académiques
- **Utilisation des bibliothèques :**
 - GMSH pour les maillages
 - MÉLINA++, ARPACK++ pour le calcul des valeurs propres
 - MUMPs pour une application efficace du préconditionneur
- **Utilisation d'une SLFMM** (FMM à 1 niveau)
- **Initiation de FastMMLib**
 - Bibliothèque FMM générique
 - Développement en cours avec Yvon Lafranche

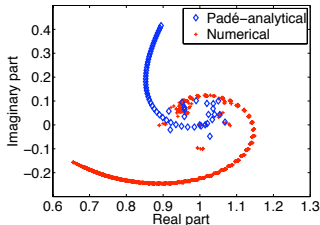
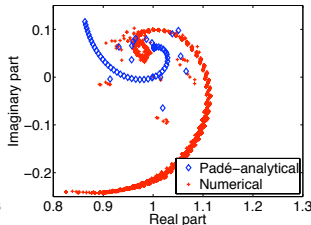
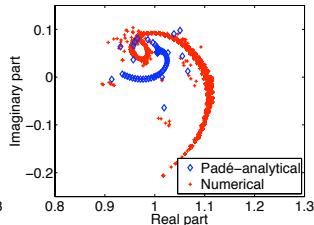
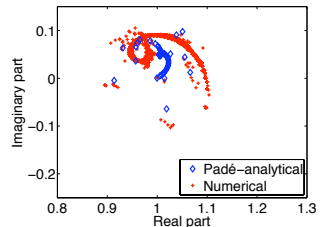
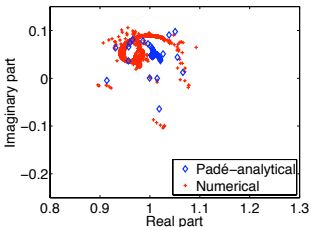
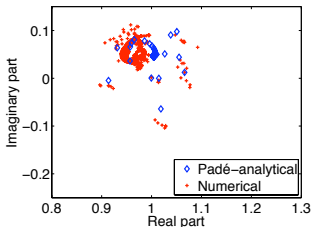
Sphère – valeurs propres

Distribution des valeurs propres, $k = 11.85$, $n_\lambda = 10$



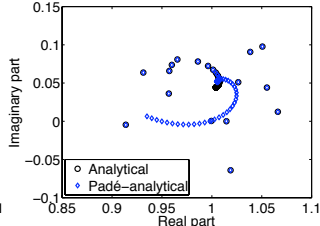
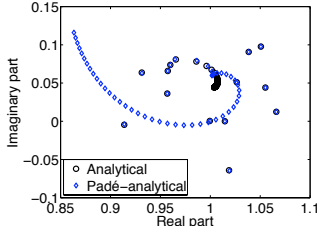
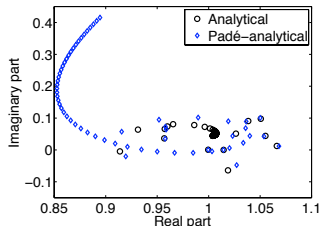
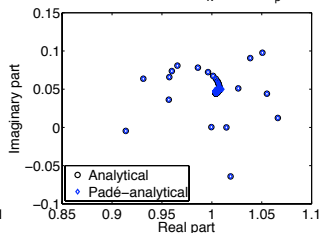
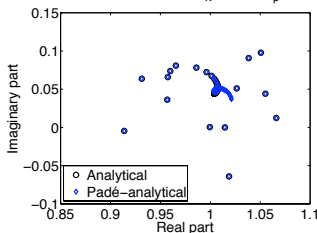
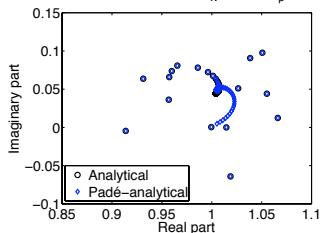
Sphère – valeurs propres

Valeurs propres numériques vs. ordre de Padé, $k = 10$, $n_\lambda = 11.85$

CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=2$ CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=4$ CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=6$ CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=8$ CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=10$ CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=12$ 

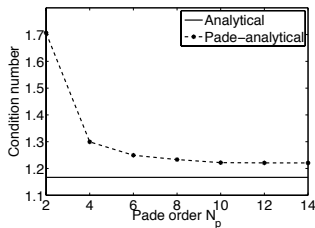
Sphère – valeurs propres

Valeurs propres analytiques vs. ordre de Padé, $k = 10$, $n_\lambda = 11.85$

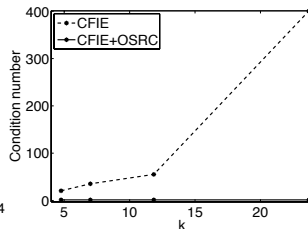
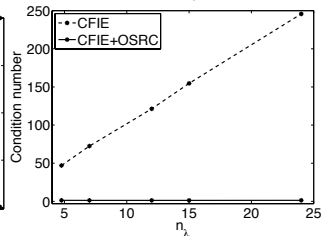
CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=2$ CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=4$ CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=6$ CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=8$ CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=10$ CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$, $N_p=12$ 

Sphère – valeurs propres

Conditionnement

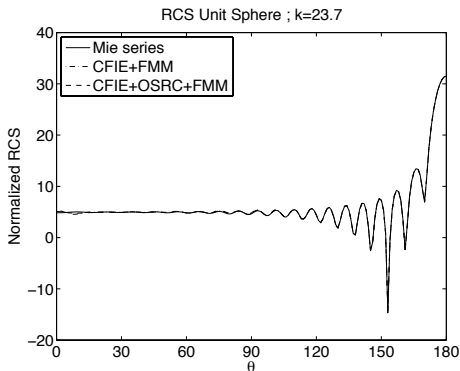
CFIE+OSRC ; $k=10$, $n_\lambda=11.85$ 

vs. ordre de Padé

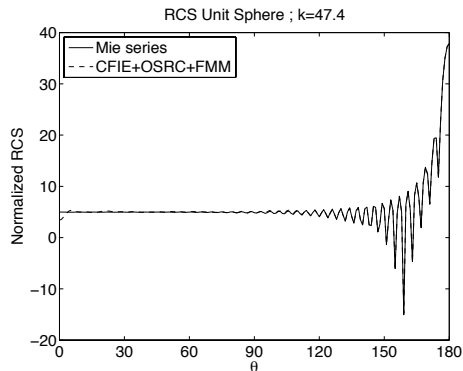
 $n_\lambda=10$ vs. k , $n_\lambda = 10$ $k=10$ vs. n_λ , $k = 10$

Sphère – Surface Équivalente Radar (SER)

CFIE+OSRC+FMM – densité de discrétisation fixée $n_\lambda = 10$



46080 triangles

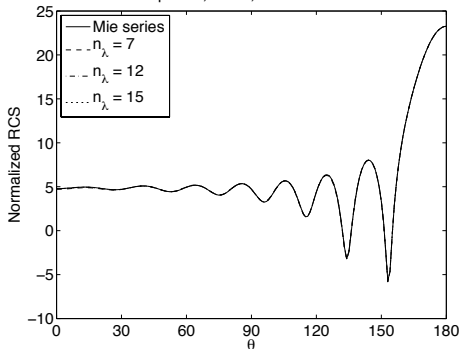


184320 triangles

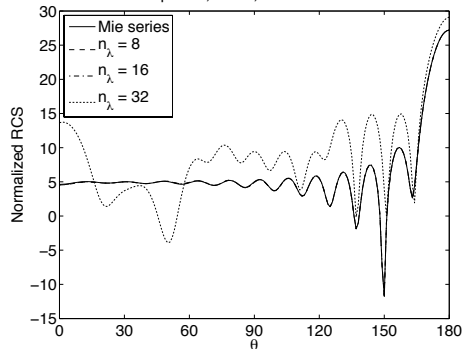
Sphère – Surface Équivalente Radar (SER)

CFIE+OSRC+FMM – nombre d'onde fixé

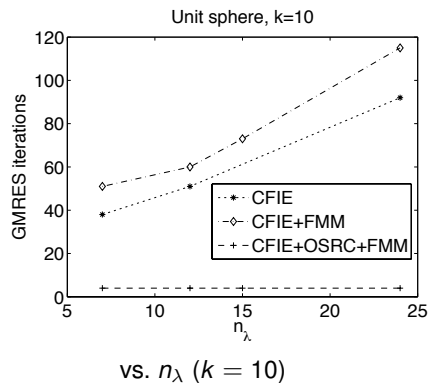
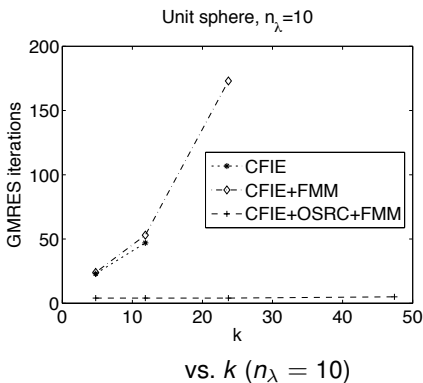
RCS Sphere ; $k=10$; CFIE+OSRC+FMM



RCS Sphere ; $k=15$; CFIE+OSRC+FMM

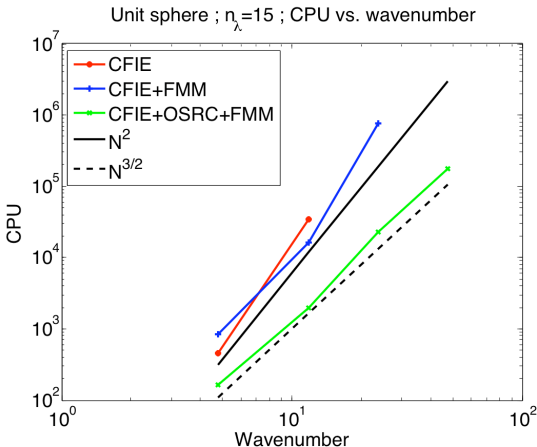


Sphère – convergence du GMRES



Sphère – complexité algorithmique

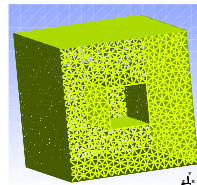
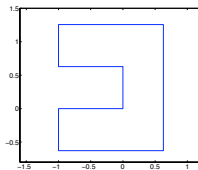
Coûts CPU



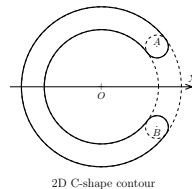
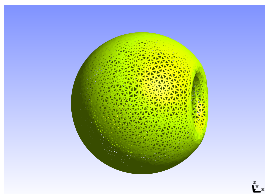
- Comportement asymptotique de la SLFMM
- Coût relatif à l'opérateur OSRC $\ll$ coût relatif aux opérateurs intégraux

Cavité rectangulaire ou sphérique

Cube $[-1, 1]^3$ avec la cavité rectangulaire $[0, 1] \times [-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}] \times [-\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{10}]$

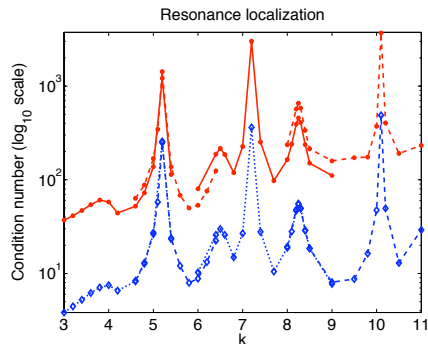
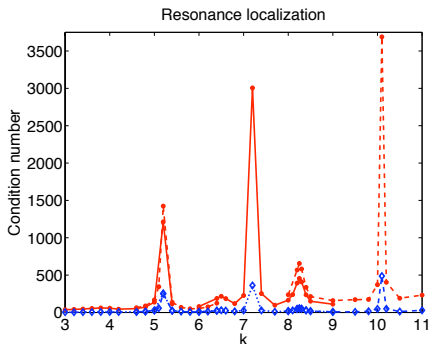


Sphère avec cavité sphérique



avec la direction d'incidence $(\sqrt{3}/2, 0, 1/2)$.

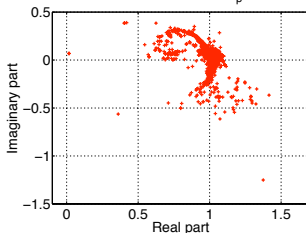
Cube avec cavité : fréquences de résonance



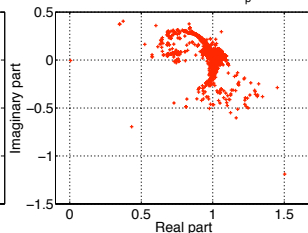
Cube avec cavité : une fréquence de résonance

Autour de $k = 5.2$

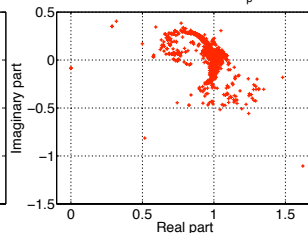
CFIE+OSRC ; $k=5$, $N_p=8$



CFIE+OSRC ; $k=5.2$, $N_p=8$

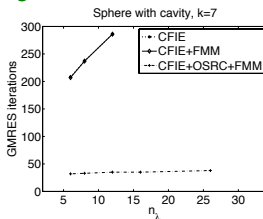
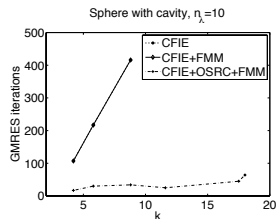


CFIE+OSRC ; $k=5.4$, $N_p=8$

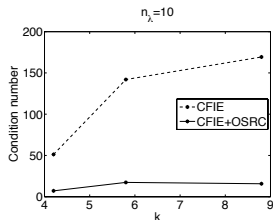
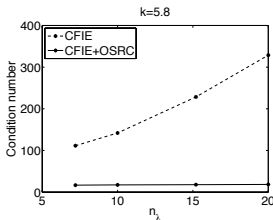


Cavité sphérique – convergence et conditionnement

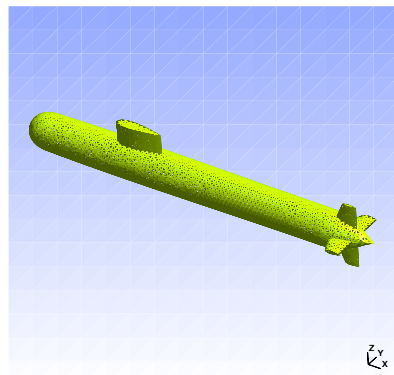
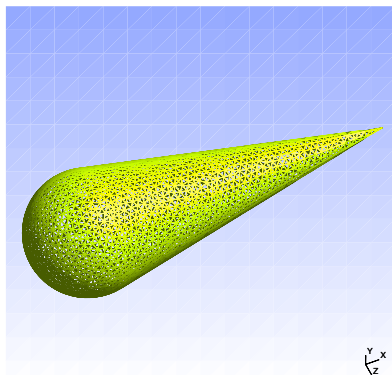
Convergence du GMRES

Nbre d'itérations vs n_λ Nbre d'itérations vs k

Conditionnement



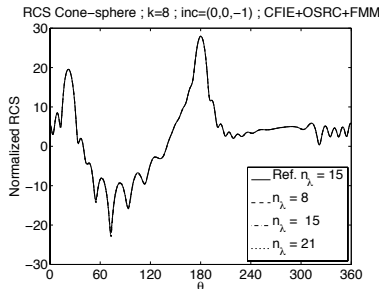
Cône-sphère et sous-marin



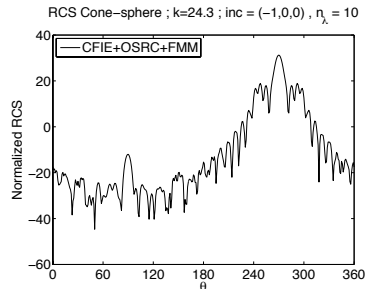
Cône-sphère : directions d'incidence $(-1, 0, 0)$; $(1, 0, 0)$; $(0, 0, -1)$.

Sous-marin : direction d'incidence $(\sqrt{3}/2, 0, 1/2)$.

Cône-sphère – SER et convergence du GMRES



Différentes densités de maillage

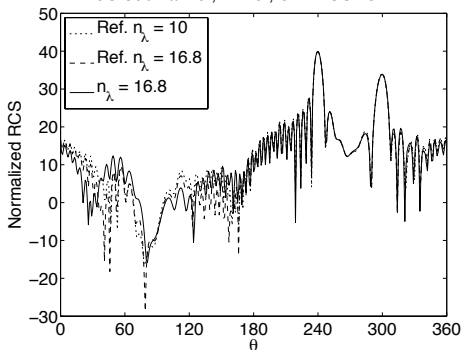
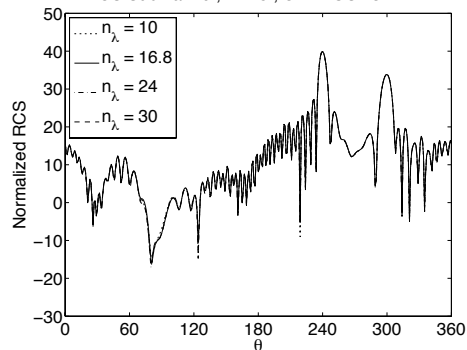


160246 triangles, $k = 24$

Dépendance à la direction d'incidence $((-1,0,0) ; (1,0,0) ; (0,0,-1))$:

Code	CFIE	CFIE+SLFMM	CFIE+SLFMM+OSRC
Nbre d'itérations	171 / 177 / 230	176 / 182 / 235	7 / 7 / 7

Sous-marin – stabilité de la SER

RCS Submarine ; $k=2.5$; CFIE+OSRC+FMMRef. $\longleftrightarrow$ CFIE+FMMRCS Submarine ; $k=2.5$; CFIE+OSRC+FMM

Stabilité de la SER

Plan

- 1 Aperçu général
- 2 Systèmes Hamiltoniens et FMM régularisée
- 3 UWVF et représentation intégrale
- 4 Éléments finis et représentation intégrale
- 5 Opérateurs intégraux de volume
- 6 FMM et préconditionneur OSRC
- 7 Perspectives**

Perspectives mathématiques

- UWVF et représentation intégrale
 - nouveaux choix de fonctions de base pour la UWVF
- Opérateurs intégraux de volume
 - analyse des formulations discrètes
 - mise en œuvre numérique avec Adrien Calvez.
- Équations intégrales de surface et préconditionneurs
 - améliorations de la discrétisation de l'OSRC
 - application à Maxwell [[DARBAS 06](#)], [[PERNET 10](#)]
- “Discrete Dipole Approximation” [[DRAINE, FLATAU 94](#)]
 - méthode rapide pour les équations intégrales de volume
 - une stratégie adaptée à la parallélisation massive (?)

Perspectives de développements numériques

- **Bibliothèque de méthodes rapides : FastMMLib**
 - une bibliothèque générique orientée objet (C++)
 - identification de 3 entités (noyau de Green, géométrie, objet FMM)
 - pas seulement FMM
- **Bibliothèque de traitement des singularités**
 - méthodes numériques (transformation de Duffy) [[SAUTER ET AL 11](#)]
 - méthodes analytiques [[LENOIR ET AL 12](#)]
 - stratégie semi-numérique [[SAYAS ET AL 14](#)]
 - combinaison des différentes stratégies
- **Contributions à XLiFE++ (éléments finis) et BEM++ ("boundary elements")**
 - opérateurs intégraux
 - préconditionneurs analytiques
 - méthodes rapides